

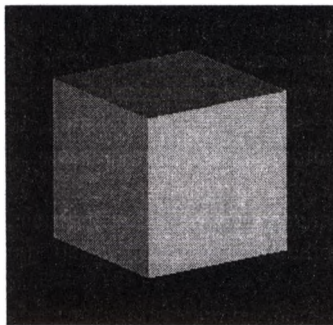
*Dariusz Jamróz**

PATRZENIE W PRZESTRZENI n -WYMIAROWEJ

1. Wstęp

Jak wygląda przestrzeń n -wymiarowa? Gdybyśmy się znaleźli w takiej przestrzeni jakie wrażenia wzrokowe by do nas docierały? Zastanówmy się, w jaki sposób odbieramy informację wzrokową z otaczającego nas świata?

Siatkówka oka, poprzez którą odbieramy bodźce wzrokowe z otaczającego nas świata, jest wycinkiem sfery, do której dociera światło z zewnątrz poprzez soczewkę. Jest wycinkiem sfery – czyli obraz powstający na niej i przekazywany do mózgu jest 2-wymiarowy. Człowiek widzi świat poprzez parę oczu, czyli docierają do nas dwa obrazy 2-wymiarowe. Ponieważ do mózgu docierają dwa obrazy 2-wymiarowe, więc nasze rozumienie i wyobrażenie przestrzeni 3-wymiarowej jest wynikiem naszego doświadczenia i „uczenia się” przez nasz mózg tej przestrzeni (rys. 1).



Rys. 1. Mimo że odbieramy obrazy dwuwymiarowe nasze mózgi rozpoznają je jako trójwymiarowe – trzy równoległoboki (figury płaskie) różnej jasności, sklejone krawędziami odbieramy jako trójwymiarowy sześcian

* Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

Polega ono na poznawaniu tej przestrzeni poprzez obserwację obiektów 3-wymiarowych z różnych stron, pod różnymi kątami (oglądanie przedmiotu polega na popatrzeniu na niego z różnych stron).

Wykorzystuje się to w kinie i telewizji, w których obserwujemy świat poprzez ekran 2-wymiarowy. Wszystkie systemy „uprzestrzennienia” telewizji i kina polegają na dostarczeniu do jednego oka obrazu, który jest przesunięty względem obrazu dostarczonego do drugiego oka (przy czym oba obrazy są 2-wymiarowe).

Jeśli nasza obserwacja rzeczywistości polega na rzutowaniu przestrzeni 3-wymiarowej na 2-wymiarowy receptor, dlaczego nie mielibyśmy zrobić tego samego z przestrzenią 4, 5, ..., n -wymiarową? Pojawiają się trzy problemy:

- 1) skąd wziąć do oglądania przestrzeń cztero- lub więcej wymiarową;
- 2) w jaki sposób „patrzeć” w takiej przestrzeni, czyli jak rzutować taką przestrzeń na ekran 2-wymiarowy;
- 3) nasze mózgi nie są nauczone odbioru przestrzeni więcej niż 3-wymiarowej poprzez wzrok, brak im w tym względzie doświadczenia.

Pierwszy problem można rozwiązać modelując taką przestrzeń w komputerze. Drugi problem rozwiązuje niniejszy artykuł. Rozwiązanie trzeciego problemu polega na odpowiednio długim przyzwyczajeniu naszego mózgu do obserwacji innej rzeczywistości. Można to zrealizować poprzez oglądanie rzeczywistości zamodelowanej w komputerze.

Interpretacja rzeczywistości n -wymiarowej stanowi interesujący obszar badań. Dostępna literatura dotycząca wizualizacji wielowymiarowych danych, np. [1–8], jest raczej uboga, więc nie stanowiła podstawy do tworzenia systemu opisanego w pracy.

2. Model matematyczny

Na początku zdefiniujemy narzędzia matematyczne służące nam do opisu przestrzeni, w której będziemy umieszczać obserwowane obiekty.

Definicja

Przestrzenią obserwowaną X będziemy nazywać dowolną przestrzeń wektorową nad ciałem F liczb rzeczywistych, n -wymiarową, $n \geq 3$, z iloczynem skalarnym.

Definicja

Punktem obserwowanym a będziemy nazywać każdy wektor przestrzeni obserwowanej X , czyli każdy $a \in X$.

Definicja

$$\delta: X \times 2^X \rightarrow 2^X$$

$$\delta(w, A) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in X : \exists k \in \mathbb{N} \wedge \exists \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \in F \wedge \exists v_1, v_2, \dots, v_k \in A, t. \text{ że } x = w + \sum_{i=1}^k \beta_i v_i \right\}.$$

Definicja

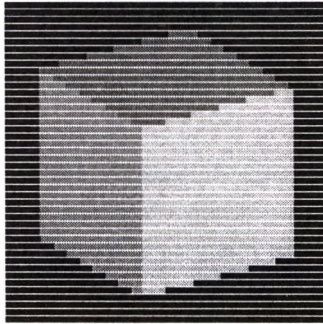
Niech $p_1, p_2 \in X$ – liniowo niezależne, $w \in X$. **Płaszczyzną obserwacyjną** $P \subset X$ będziemy nazywać $P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$.

W ten sposób zdefiniowana *plaszczyna obserwacyjna* P będzie nam służyć jako ekran, poprzez który będziemy obserwować obiekty umieszczone w *przestrzeni obserwowanej* X . Wektor w wskazywać będzie położenie środka tego ekranu, natomiast p_1, p_2 jego osie. W tym momencie musimy zastanowić się, w jaki sposób promienie świetlne odbite od danego punktu *obserwowanego* będą zmierzać do *plaszczyny obserwacyjnej*? W przestrzeni 3-wymiarowej do danego punktu e *plaszczyny obserwacyjnej* P mogą dotrzeć tylko promienie świetlne odbite od najbliższego punktu leżącego na prostej prostopadłej do P i przechodzącej przez e . W przestrzeni 3-wymiarowej jest tylko jedna taka prosta, natomiast w przestrzeni n -wymiarowej, dla $n > 3$ takich prostych jest więcej. Pojawia się więc problem: do jednego punktu e *plaszczyny obserwacyjnej* P mogą jednocześnie dotrzeć promienie odbite od wielu punktów obserwowanego obiektu. Możemy temu zapobiec poprzez wybór jednej konkretnej prostej prostopadłej do P , która będzie nam służyć jako kierunek, wzdłuż którego będziemy w danej chwili dokonywać rzutowania.

Definicja

Kierunkiem rzutowania r na *plaszczynę obserwacyjną* $P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$ będziemy nazywać dowolny wektor $r \in X$ taki, że wektory $\{p_1, p_2, r\}$ są liniowo niezależne.

Aby to dokładnie zilustrować przyjmijmy na chwilę, że nasza *plaszczyna obserwacyjna* P jest jednowymiarowa i przy jej pomocy chcemy obserwować bryłę 3-wymiarową, np. taką jaka jest przedstawiona na rysunku 1. Nie dość, że w celu poznania jej wyglądu będziemy musieli „obejść ją ze wszystkich stron”, to dodatkowo z każdego punktu będziemy musieli ją „prześledzić z góry na dół”. Przedstawiono to na rysunku 2.



Rys. 2. Przedstawiono 44 jednowymiarowe płaszczyzny obserwacyjne różniące się jedynie wyborem kierunku rzutowania r . Każda pozioma linia o szerokości całego rysunku stanowi tutaj jednowymiarową płaszczyznę obserwacyjną przy konkretnym ustalonym r . Dla przejrzystości rozdzielono płaszczyzny obserwacyjne białymi liniami

Należy zwrócić uwagę na fakt, że wszystkie jednowymiarowe *plaszczyny obserwacyjne* przedstawione na tym rysunku różnią się jedynie wyborem *kierunku rzutowania* r . Zatem, przy pomocy jednowymiarowej *plaszczyny obserwacyjnej* zmieniając *kierunek rzutowania* r możemy uzyskać te same informacje o obserwowanym obiekcie, co w trakcie jego obserwacji przy pomocy ekranu dwuwymiarowego. Pozwala to na powstanie w naszym umyśle obrazu całości zewnętrznego wyglądu obserwowanej bryły.

Definicja

Kierunek rzutowania r na płaszczyznę obserwacyjną $P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$ będziemy nazywać właściwym, jeśli wektory $\{p_1, p_2, r\}$ są układem ortogonalnym.

Definicja

Prostą równoległą do $r \in X$ i przechodzącą przez $a \in X$ będziemy nazywać zbiór $k_{a,r} \subset X$

$$k_{a,r} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : \exists \psi \in F, t, \text{ że } x = \psi r + a\} \quad (1)$$

Definicja

Rzutem punktu obserwowanego $a \in X$ zgodnym z kierunkiem rzutowania $r \in X$ na płaszczyznę obserwacyjną P będziemy nazywać wektor $e \in P \cap k_{a,r}$, gdzie $k_{a,r}$ jest prostą równoległą do r i przechodzącą przez a .

Sprawdźmy czy taka definicja rzutu punktu obserwowanego jest prawidłowa, czyli czy dany punkt obserwowany a będzie widoczny w co najwyżej jednym miejscu płaszczyzny obserwacyjnej P . Pokazuje to twierdzenie 1.

Twierdzenie 1

Niech:

$P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$ – płaszczyzna obserwacyjna,
 $r \in X$ – kierunek rzutowania na płaszczyznę obserwacyjną P ,
 $a \in X$,
 $k_{a,r}$ – prosta równoległa do r i przechodząca przez a ,

wtedy:

zbiór $P \cap k_{a,r}$ jest zbiorem co najwyżej jednoelementowym.

Dowód

Hipoteza: $\exists e_1 \neq e_2$, t. że $e_1 \in P \cap k_{a,r}$ oraz $e_2 \in P \cap k_{a,r} \Rightarrow$

$\exists e_1 \neq e_2$, t. że $e_1 \in P \wedge e_2 \in P \wedge e_1 \in k_{a,r} \wedge e_2 \in k_{a,r} \Rightarrow \exists \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \in F$, t. że $e_1 = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \wedge e_2 = w + \beta_3 p_1 + \beta_4 p_2$ oraz $\exists \psi_1, \psi_2 \in F$, t. że $e_1 = \psi_1 r + a \wedge e_2 = \psi_2 r + a \wedge \psi_1 \neq \psi_2 \Rightarrow \psi_1 r + a = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \wedge \psi_2 r + a = w + \beta_3 p_1 + \beta_4 p_2 \wedge \psi_1 \neq \psi_2 \Rightarrow a = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 - \psi_1 r \wedge a = w + \beta_3 p_1 + \beta_4 p_2 - \psi_2 r \wedge \psi_1 \neq \psi_2 \Rightarrow w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 - \psi_1 r = w + \beta_3 p_1 + \beta_4 p_2 - \psi_2 r \wedge \psi_1 \neq \psi_2 \Rightarrow (\psi_2 - \psi_1) r + (\beta_1 - \beta_3) p_1 + (\beta_2 - \beta_4) p_2 = 0 \wedge (\psi_2 - \psi_1) \neq 0 \Rightarrow$ wektory $\{p_1, p_2, r\}$ nie są liniowo niezależne – jest to sprzeczne z definicją kierunku rzutowania r , czyli hipoteza fałszywa. ■

Pokażemy teraz warunek konieczny i wystarczający na to, by dany punkt obserwowany a był widoczny na płaszczyźnie obserwacyjnej P .

Twierdzenie 2

Niech:

$P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$ – płaszczyzna obserwacyjna,
 $r \in X$ – kierunek rzutowania na płaszczyznę obserwacyjną P ,
 $a \in X$,
 $k_{a,r}$ – prosta równoległa do r i przechodząca przez a ,

wtedy:

$P \cap k_{a,r} \neq \emptyset$ wtw $a - w$ jest kombinacją liniową wektorów $\{p_1, p_2, r\}$.

Dowód:

1) \Rightarrow

$P \cap k_{a,r} \neq \emptyset \Rightarrow \exists e \in P \cap k_{a,r} \Rightarrow \exists e \in X$, t.że $e \in P \wedge e \in k_{a,r} \Rightarrow \exists \beta_1, \beta_2 \in F$, t.że
 $e = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \wedge \exists \psi \in F$, t.że $e = \psi r + a \Rightarrow \exists \beta_1, \beta_2, \psi \in F$, t.że
 $\psi r + a = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \Rightarrow \exists \beta_1, \beta_2, \psi \in F$, t.że $a - w = \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + (-\psi)r \Rightarrow$
 $a - w$ jest kombinacją liniową wektorów: $\{p_1, p_2, r\}$ □

2) \Leftarrow

$a - w$ jest kombinacją liniową wektorów $\{p_1, p_2, r\} \Rightarrow \exists \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in F$, t.że
 $a - w = \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \xi_3 r \Rightarrow \exists \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in F$, t.że $(-\xi_3)r + a = w + \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2$,
przyjmijmy oznaczenie: $e = w + \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2$, $e \in X$, wtedy:
 $e = w + \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 = (-\xi_3)r + a \Rightarrow \exists \xi_1, \xi_2 \in F$, t.że $e = w + \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 \wedge \exists \psi = -\xi_3 \in F$, t.że
 $e = \psi r + a \Rightarrow e \in P \wedge e \in k_{a,r} \Rightarrow \exists e \in P \cap k_{a,r} \Rightarrow P \cap k_{a,r} \neq \emptyset$ ■

Definicja

Niech $e \in P \cap k_{a,r}$ – rzut punktu obserwowanego $a \in X$ zgodny z właściwym kierunkiem rzutowania $r \in X$ na płaszczyznę obserwacyjną $P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$.

Położeniem rzutu punktu obserwowanego a będziemy nazywać parę $\{\beta_1, \beta_2\}$, $\beta_1, \beta_2 \in F$, t.że $e = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2$.

Odległością rzutu punktu obserwowanego a będziemy nazywać $\psi \in F$, t.że $e = \psi r + a$.

Oczywiście tak zdefiniowana odległość rzutu nie spełnia własności np. metryki, ale jest idealna do naszych potrzeb – określa bowiem – poza odległością, również po której stronie płaszczyzny obserwacyjnej P znajduje się punkt obserwowany a .

Zastanówmy się teraz nad następującym problemem: weźmy płaszczyznę obserwacyjną P , dowolny punkt a przestrzeni obserwowanej X oraz dowolny kierunek rzutowania r . Wykonajmy rzut punktu obserwowanego a zgodnie z kierunkiem rzutowania r na płaszczyznę obserwacyjną P otrzymując punkt $e \in P$. Chcemy dowiedzieć się, jakie jest położenie punktu e na P , oraz jaka jest jego odległość od a , czyli chcemy policzyć położenie rzutu punktu obserwowanego a oraz odległość rzutu punktu obserwowanego a . Jak to zrobić pokazuje twierdzenie 3.

Twierdzenie 3

Niech:

X – przestrzeń obserwowana n -wymiarowa, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – baza X ,
 $P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$ – płaszczyzna obserwacyjna, $\{p_1, p_2\}$ – układ ortogonalny,

$$p_1 = \sum_{i=1}^n p_{1,i} x_i, \quad p_2 = \sum_{i=1}^n p_{2,i} x_i, \quad p_{j,i} \in F \quad \forall j=1, 2 \quad \forall i=1, 2, \dots, n,$$

$$w = \sum_{i=1}^n w_i x_i, \quad w_i \in F \quad \forall i=1, 2, \dots, n,$$

$r \in X$ – właściwy kierunek rzutowania na płaszczyznę obserwacyjną P ,

$$r = \sum_{i=1}^n r_i x_i, \quad r_i \in F \quad \forall i=1, 2, \dots, n$$

$$a \in X \text{ – punkt obserwowany, } a = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad a_i \in F \quad \forall i=1, 2, \dots, n,$$

$\beta_1, \beta_2, \psi \in F$, t.ż. spełniony jest układ równań:

$$\begin{cases} \beta_1 p_{1,1} + \beta_2 p_{2,1} - \psi r_1 = a_1 - w_1, \\ \beta_1 p_{1,2} + \beta_2 p_{2,2} - \psi r_2 = a_2 - w_2, \\ \vdots \\ \beta_1 p_{1,n} + \beta_2 p_{2,n} - \psi r_n = a_n - w_n, \end{cases}$$

wtedy:

para $\{\beta_1, \beta_2\}$ – stanowi położenie rzutu punktu obserwowanego a ,
 ψ – odległość rzutu punktu obserwowanego a .

Dowód

$$\forall i=1, 2, \dots, n \quad \beta_1 p_{1,i} + \beta_2 p_{2,i} - \psi r_i = a_i - w_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n (\beta_1 p_{1,i} + \beta_2 p_{2,i} - \psi r_i) x_i = \sum_{i=1}^n (a_i - w_i) x_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \beta_1 p_{1,i} x_i + \sum_{i=1}^n \beta_2 p_{2,i} x_i - \sum_{i=1}^n \psi r_i x_i = \sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{i=1}^n w_i x_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta_1 \sum_{i=1}^n p_{1,i} x_i + \beta_2 \sum_{i=1}^n p_{2,i} x_i - \psi \sum_{i=1}^n r_i x_i = \sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{i=1}^n w_i x_i \Rightarrow \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 - \psi r = a - w \Rightarrow$$

$\Rightarrow w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 = \psi r + a$ przez $e \in X$ przyjmijmy $e = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2$, wtedy

$$e = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 = \psi r + a \Rightarrow \exists \beta_1, \beta_2 \in F, \text{ t.ż. } e = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \wedge \exists \psi \in F,$$

$$\text{t.ż. } e = \psi r + a \Rightarrow e \in P \wedge e \in k_{a,r} \wedge \exists \beta_1, \beta_2 \in F, \text{ t.ż. } e = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \wedge \exists \psi \in F,$$

$$\text{t.ż. } e = \psi r + a \Rightarrow \exists e \in P \cap k_{a,r} \wedge \exists \beta_1, \beta_2 \in F, \text{ t.ż. } e = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \wedge \exists \psi \in F,$$

t.ż. $e = \psi r + a \Rightarrow$ para $\{\beta_1, \beta_2\}$ jest położeniem rzutu punktu obserwowanego a oraz jest odległością rzutu punktu obserwowanego a . ■

Opiszemy teraz bryły, które będziemy chcieli obserwować w przestrzeni obserwowanej X . Są to bryły będące częścią wspólną pewnej liczby półprzestrzeni.

Definicja

Półprzestrznią $Z_{(s,d)}$ *zakotwiczoną w* $s \in X$ *i skierowaną w kierunku* $d \in X$ *będziemy nazywać* zbiór

$$Z_{(s,d)} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : (x - s, d) \geq 0\}.$$

Definicja

Ścianą $S_{(s,d)}$ *półprzestrzeni* $Z_{(s,d)}$ *będziemy nazywać* zbiór

$$S_{(s,d)} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : (x - s, d) = 0\}.$$

Definicja

Bryłą wypukłą Y *zawartą w półprzestrzeniach:* $Z_{(s_1,d_1)}, Z_{(s_2,d_2)}, \dots, Z_{(s_k,d_k)}$ *będziemy nazywać* zbiór

$$Y \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in X : x \in \bigcap_{i=1}^k Z_{(s_i,d_i)} \right\}.$$

Zastanówmy się chwilę, jak światło odbija się od ściany S bryły wypukłej Y ? Zarówno wymiar przestrzeni obserwowanej X , jak i wymiar bryły wypukłej Y ustalmy np. na 7. Wtedy ściany S bryły wypukłej Y oddzielające wewnątrz bryły od jej zewnątrz będą obiektami 6-wymiarowymi. Należy zauważyć, że światło może się odbić od dowolnego punktu należącego do takiej ściany, czyli w przykładowej sytuacji od dowolnego punktu należącego do obiektu 6-wymiarowego (zatem również od „wnętrza” takiego obiektu będącego ścianą). Pytanie brzmi: jaką jasność ma mieć światło odbite od danego punktu należącego do ściany np. 6-wymiarowej? Dzięki powyższej definicji ściany $S_{(s,d)}$ odpowiedź jest banalna: jasność zależy od kierunku skierowania d ściany S , kierunku rzutowania r oraz od kierunku, z którego biegnie światło.

Zastanówmy się teraz nad innym problemem. Weźmy dowolny punkt e płaszczyzny obserwacyjnej P , $e \in P$. Aby stwierdzić, która ze ścian S bryły wypukłej Y jest widoczna z punktu e musimy stwierdzić, która z nich jest najbliższa. W tym celu musimy policzyć odległość punktu e od każdej ze ścian. Sposób policzenia tej odległości podaje nam twierdzenie 5. Wcześniej jednak musimy pokazać, że z dowolnego punktu płaszczyzny obserwacyjnej P widoczny jest dokładnie jeden punkt ściany S (niekoniecznie należący do bryły wypukłej Y).

Twierdzenie 4

Niech:

$P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$ – płaszczyzna obserwacyjna, $\{p_1, p_2\}$ – układ ortogonalny,
 $e \in P$,
 $r \in X$ – właściwy kierunek rzutowania na płaszczyznę obserwacyjną P ,

$S_{(s,d)} \subset X$ – ściana półprzestrzeni, t.ż. $(r, d) \neq 0$,

wtedy:

$\exists a \in S_{(s,d)}$ dokładnie jedno, t.ż. e jest rzutem punktu obserwowanego a zgodnym z kierunkiem rzutowania r na płaszczyznę obserwacyjną P .

Dowód

1) Istnienie.

Niech:

$$\psi = \frac{(e-s, d)}{(r, d)} \text{ oraz } a = e - \psi r \Rightarrow (e-s, d) = \psi (r, d) \wedge e = \psi r + a \Rightarrow$$

$(e-s, d) - \psi (r, d) = 0 \wedge \exists \psi \in F$, t.że $e = \psi r + a \Rightarrow (e - \psi r - s, d) = 0 \wedge e \in k_{a,r}$ oraz z założenia $e \in P \Rightarrow (a-s, d) = 0 \wedge e \in P \cap k_{a,r} \Rightarrow a \in S_{(s,d)}$ oraz e jest rzutem punktu obserwowanego a zgodnym z kierunkiem rzutowania r .

2) Jedyność.

Hipoteza: $\exists a \neq b$, t.że $e \in P \cap k_{a,r} \wedge e \in P \cap k_{b,r} \wedge a \in S_{(s,d)} \wedge b \in S_{(s,d)} \Rightarrow \exists \psi_1, \psi_2 \in F$,
t.że $e = \psi_1 r + a \wedge e = \psi_2 r + b \wedge (a-s, d) = 0 \wedge (b-s, d) = 0 \Rightarrow a = e - \psi_1 r \wedge b =$
 $= e - \psi_2 r \wedge (a-s, d) = 0 \wedge (b-s, d) = 0 \Rightarrow a = e - \psi_1 r \wedge b = e - \psi_2 r \wedge (e - \psi_1 r - s, d) =$
 $= 0 \wedge (e - \psi_2 r - s, d) = 0 \Rightarrow a = e - \psi_1 r \wedge b = e - \psi_2 r \wedge \psi_1 (r, d) = (e-s, d) \wedge \psi_2 (r, d) =$
 $= (e-s, d) \Rightarrow a = e - \psi_1 r \wedge b = e - \psi_2 r \wedge \psi_1 = \psi_2 = \frac{(e-s, d)}{(r, d)} \Rightarrow a = b$

czyli hipoteza fałszywa. ■

Twierdzenie 5

Niech:

$P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$ – płaszczyzna obserwacyjna, $\{p_1, p_2\}$ – układ ortogonalny,
 $e \in P$, czyli $\exists \beta_1, \beta_2 \in F$, t.że $e = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2$,
 $r \in X$ – właściwy kierunek rzutowania na płaszczyznę obserwacyjną P ,
 $S_{(s,d)} \subset X$ – ściana półprzestrzeni, t.że $(r, d) \neq 0$,
 $a \in S_{(s,d)}$, t.że e jest rzutem punktu obserwowanego a ,

wtedy

odległość rzutu punktu obserwowanego a wynosi

$$\psi = \frac{(w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 - s, d)}{(r, d)}.$$

Dowód

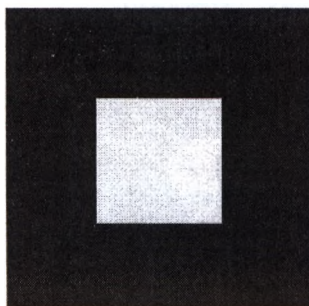
Na mocy twierdzenia 4 wiemy że: $\exists a \in S_{(s,d)}$, t.że e jest rzutem punktu obserwowanego a zgodnym z kierunkiem rzutowania r oraz z założenia

$$e = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \Rightarrow (a-s, d) = 0 \wedge e \in P \cap k_{a,r} \wedge e = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \Rightarrow (a-s, d) = 0 \wedge \exists \psi \in F,$$
$$\text{t.że } e = \psi r + a \wedge e = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \Rightarrow (a-s, d) = 0 \wedge \psi r + a =$$
$$= w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \Rightarrow (a-s, d) = 0 \wedge a = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 - \psi r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 - \psi r - s, d) = 0 \Rightarrow (w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 - s, d) + (-\psi r, d) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 - s, d) - \psi (r, d) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 - s, d) = \psi (r, d) \Rightarrow \psi = \frac{(w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 - s, d)}{(r, d)}.$$

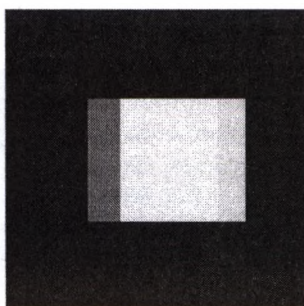
3. Realizacja

Twierdzenie 3 podaje nam sposób obliczenia dla dowolnego punktu należącego do przestrzeni n -wymiarowej odległości i położenia jego rzutu na daną płaszczyznę obserwacyjną (ekran). Natomiast korzystając z twierdzenia 5 dla dowolnego punktu należącego do płaszczyzny obserwacyjnej (ekranu) możemy sprawdzić jego odległość w kierunku r od każdej ściany bryły. Możemy więc sprawdzić, która ze ścian należących do bryły jest najbliższej, czyli która – patrząc w kierunku r z danego punktu płaszczyzny obserwacyjnej (ekranu) – przesłania inne, więc jest widoczna.

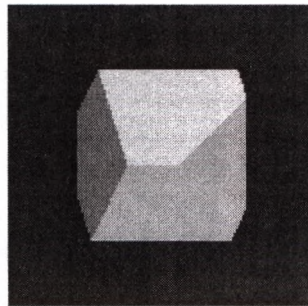
Na podstawie przedstawionej teorii powstał system służący do obserwacji brył n -wymiarowych. Rysunki 3–8 przedstawiają kostkę 4-wymiarową (będącą czterowymiarowym odpowiednikiem sześcianu) oglądaną z różnych stron, przy różnych ustawieniach kierunku rzutowania r . Należy zwrócić uwagę, że kostka taka ma osiem „ścian”, a każda z tych „ścian” jest sześcianem trójwymiarowym. Już w tym momencie u większości ludzi wyobrażenia zawodzi i jedyne co można, to patrzeć z różnych stron i uczyć nasz mózg rozumienia takiej bryły.



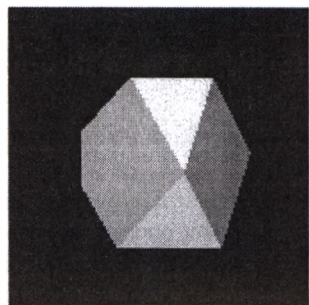
Rys. 3. Kostka 4-wymiarowa oglądana z odpowiedniej strony i przy odpowiednim kierunku rzutowania r (kwadrat)



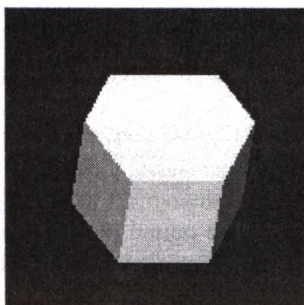
Rys. 4. Kostka 4-wymiarowa (3 skleione prostokąty)



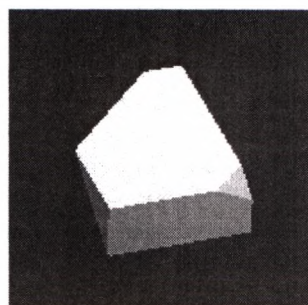
Rys. 5. Kostka 4-wymiarowa (1 trójkąt i 3 pięciokąty)



Rys. 6. Kostka 4-wymiarowa (2 trójkąty, 1 czworokąt, 1 pięciokąt)

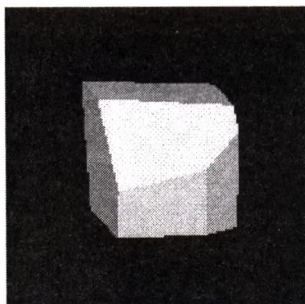


Rys. 7. Kostka 4-wymiarowa (3 czworokąty i 1 sześciokąt)

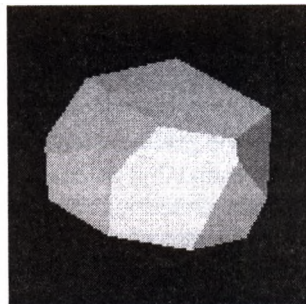


Rys. 8. Kostka 4-wymiarowa (2 trójkąty, 1 pięciokąt, 1 sześciokąt)

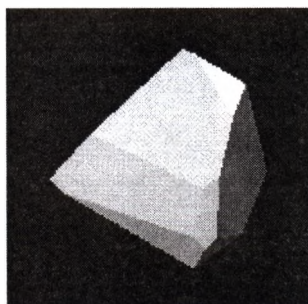
Rysunki 9–12 przedstawiają kostkę 7-wymiarową (będącą siedmiowymiarowym odpowiednikiem sześcianu) oglądaną z różnych stron, przy różnych ustawieniach kierunku rzutowania r . Kostka taka ma czternaście „ścian”, a każda z tych „ścian” jest kostką sześciowymiarową.



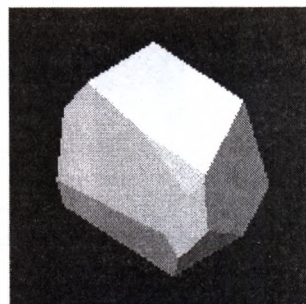
Rys. 9. Kostka 7-wymiarowa (3 czworokąty i 2 pięciokąty)



Rys. 10. Kostka 7-wymiarowa (4 czworokąty, 1 pięciokąt, 1 sześciokąt)



Rys. 11. Kostka 7-wymiarowa (1 trójkąt, 2 czworokąty, 3 pięciokąty, 1 sześciokąt)



Rys. 12. Kostka 7-wymiarowa (1 trójkąt, 1 czworokąt, 4 pięciokąty, 1 sześciokąt)

4. Wnioski

Ponieważ rozwiązanie omawianego problemu wymyka się naszemu ludzkiemu doświadczeniu, konieczne stało się stworzenie silnego formalizmu opisującego i rozwiązującego ten problem. Każdą najdrobniejszą własność potrzebną do dalszych rozważań należało formalnie udowodnić, mimo pozornej oczywistości niektórych faktów.

Pewnym problemem okazało się poruszanie, i to już w przestrzeni 4-wymiarowej. O ile położenie w takiej przestrzeni jest łatwo opisać (4 współrzędne), wartości początkowe poszczególnych wektorów też, to problemem okazał się obrót – bowiem w takiej przestrzeni wartość jednego kąta nie wystarczy do opisanego obrotu wokół osi, jeden kąt opisuje obrót wokół płaszczyzny. Poruszanie się w przestrzeni 7-wymiarowej jest jeszcze bardziej skomplikowane: 7 kierunków ruchu (14 klawiszy służących do obsługi) i dodatkowo 21 możliwych różnych obrotów (42 klawisze). Razem 56 klawiszy służących do zmiany położenia i kierunku patrzenia.

W trakcie oglądania już 4-wymiarowej bryły z różnych stron ma się wrażenie, że zmienia ona kształt (rys. 3–8). Jednak podobne wrażenie miałby człowiek oglądając sześcian 3-wymiarowy z różnych stron, gdyby nie znał jego wyglądu (sześcian 3-wymiarowy z odpowiedniego punktu widzenia wygląda jak kwadrat, z innego jak dwa sklezione prostokąty, a jeszcze z innego, jak na rys. 1).

Wykorzystując powyższy model matematyczny można oglądać dowolne bryły w dowolnie wymiarowych przestrzeniach. Kostki pokazane na rysunkach 3 do 12 (4-wymiarowa i 7-wymiarowa) są jedynie przykładami. Jedynym problemem jest kwadratowy wzrost (względem liczby wymiarów) liczby klawiszy potrzebnych do poruszania się.

Na zakończenie postawmy pytanie: po co oglądać przestrzenie więcej niż 3-wymiarowe? Odpowiedź chyba jest podobna do odpowiedzi na pytanie: po co używać mikroskopu? W obu bowiem przypadkach pozwala nam to lepiej zapoznać się z pewną rzeczywistością. Teraz możemy ją zobaczyć, a nie tylko sobie wyobrażać. Możemy to wykorzystać wszędzie tam, gdzie spotykamy się z koniecznością użycia przestrzeni więcej wymiarowych. Taka konieczność powstaje np. przy analizie wielowymiarowych danych, przy analizie wielowymiarowych przestrzeni cech, itp.

Literatura

- [1] Banchoff T.: *Beyond the Third Dimension: Geometry, Computer, Graphics and Higher Dimensions*. Scientific American Library, 1990
- [2] Beshers C., Feiner S.: *Real-Time 4D Animation on a 3D Graphics Workstation* Graphics Interface '88, Jun. 6–10, 1988, 1–7
- [3] Hanson A.J., Heng P.A.: *Illuminating the Fourth Dimension*. IEEE Computer Graphics & Application, No. 4, 1992, 54–62
- [4] Hanson A.J., Cross R.A.: *Interactive Visualization Methods for Four Dimensions*. Proceedings of Visualization '93, San Jose, CA, October 25–29, 1993, 196
- [5] Hollasch S.R.: *Four-Space Visualization of 4D Objects*. Arizona State University, 1991 (Master's Thesis)
- [6] Mihalisin T. et al.: *Visualizing a Scalar Field on an n-Dimensional Lattice*. IEEE Proceedings on Visualization, 1990
- [7] Noll A.: *A Computer Technique for Displaying n-Dimensional Hyperobjects*. Comm. ACM 10, 1967
- [8] *Space*. American Journal of Mathematics, 1980